

משולש פסקל ונוסחאת הבינום

משולש פסקל הוא מבנה מתמטי של מספרים המסודרים כמשולש שווה שוקיים. התכונה הבולטת של המספרים היא שכל איבר במשולש הוא סכום של שני האיברים שמופיעים מעליו. תכונות בולטות נוספות של משולש פסקל:

1. המשולש סימטרי
2. סכום כל שורה במשולש הוא פי שניים מסכום קודמתה (כלומר סכום אברי כל שורה הוא 2^n)
3. סדרות ההפרשים של האלכסונים הן האלכסון הקודם (מן השמאלי לימני)
4. עד השורה הרביעית איברי כל שורה הם המספר 11 בחזקת מספר השורה.

למשל:

$n = 0$										1					
$n = 1$									1	1					
$n = 2$									1	2	1				
$n = 3$									1	3	3	1			
$n = 4$									1	4	6	4	1		
$n = 5$									1	5	10	10	5	1	
$n = 6$									1	6	15	20	15	6	1

נשים לב ש:

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

למעשה אם נרצה לדעת את המקדמים בפיתוח של $(x + y)^n$ עלינו למצוא את השורה ה- n במשולש פסקל

דוגמא

$$\begin{aligned}(x + 1)^5 &= 1x^01^{5-0} + 5x^11^{5-1} + 10x^21^{5-2} + 10x^31^{5-3} + 5x^41^{5-4} + 1x^51^{5-5} = \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

הערה: הצבנו $y = 1$ וקיבלנו פולינום ממעלה 5. אם נרצה לדעת את a_4 נחפש את המקדם של x^4 . בדוגמא קיבלנו $a_4 = 5$

ניתן להשתמש בנוסחאת הבינום של ניוטון על מנת לפתוח את הביטוי $(x + y)^n$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

כאשר:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

דוגמא

$$\begin{aligned} (x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{k=5} \binom{5}{k} x^k y^{5-k} = \binom{5}{0} x^0 1^{5-0} + \binom{5}{1} x^1 1^{5-1} + \binom{5}{2} x^2 1^{5-2} + \binom{5}{3} x^3 1^{5-3} + \binom{5}{4} x^4 1^{5-4} + \binom{5}{5} x^5 1^{5-5} = \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \end{aligned}$$