

מבחן מיון במתמטיקה, 17.4.2015

מספר נקודות אפשרי: 135. ציון עובר הוא 70 ומעלה. ענו על הטופס.
1. חשבו את הגבולות הבאים. אם הגבול לא קיים, הסבירו מדוע:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{3h} \quad (5\%) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (|\sin x|)^{\frac{1}{1+x^2}} \quad (5\%) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} \quad (5\%) \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+100} - \sqrt{x} \quad (5\%) \quad (\text{ד})$$

2. (5%) כתבו אי שוויון שקבוצת המספרים שמקיימים אותו היא $[3, 4] \cup [5, 6]$.
תזכורת: $A \cup B$ הוא האיחוד של שתי הקבוצות A ו- B .

3. (5%) מצאו פונקציה שתחום העלייה שלה הוא בדיוק $[3, 4] \cup [5, 6]$.

4. (5%) כתבו פונקציה $f(x)$ שמוגדרת לכל x חיובי,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

5. (5%) כתבו פונקציה $f(x)$ שמוגדרת לכל x ממשי,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

(שימו לב - אם פתרתם את ב' אין צורך לפתור את א', תקבלו את הניקוד גם על א').

6. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ שעבורה $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ קיים, ו- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ לא קיים.

תתקבל רק תשובה שמכילה נוסחה אחת, ולא חלוקה למקרים.

7. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ ש- $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$ ו- $f(e) = 10$.

8. תהא $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

א. (5%) כתבו נוסחה לפונקציה ההפוכה לה:

$$f^{-1}(y) = \dots$$

ב. (5%) חשבו את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה בנקודה בה $x = 0, y = 1$.

9. תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שאינה פולינום והמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. $f(0) = 1$

א. $f'(0) = 2$

ב. $f''(0) = 3$

10. (5%) חשבו את הממוצע של המספרים 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

11. (5%) חשבו את הממוצע של המספרים $1, 2, 4, \dots, 2^n$ (התשובה תינתן כפונקציה של n).

12. (5%) פתרון אחד של המשוואה $x^2 + 157x = 1670$ הוא $x = 10$. מהו הפתרון השני?

13. (5%) תנו דוגמה למשוואה ממעלה שלישית שיש לה בדיוק שני פתרונות.

14. (5%) מצאו פולינום $p(x)$ ש- $x^7 + 1 = p(x)(x + 1)$

15. (5%) תנו דוגמה לפולינום $p(x)$ ממעלה כלשהי שיש לו שורשים 1, 2, 3, והוא מקיים $p'(1) = 7$.

16. (5%) מצאו פונקציה $f(x)$ ש- $f'(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$ לכל x .
כמה פונקציות כאלה יש?

17. חשבו:
א. (5%) $\ln_{e^5} e^3$

ב. (5%) $\frac{\log_{10} e}{\log_{100} e^2}$

18. (5%) רשמו את הביטוי $x^2 + 5x - 1$ בצורה $a(x + b)^2 + c$.

19. א. (5%) חשבו את המכפלה של כל שורשי המשוואה $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

ב. (5%) חשבו את הסכום של השורשים האלו.

20. תהא $f(x) = \ln(\arctan(2x + 5))$. מהי הפונקציה ההפוכה לה?

21. (5%) תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. השטח בין הגרף $y = f(x)$ לבין ציר x בין הערכים $x = 0$ ו- $x = 7$ הוא 10

ב. $f'(0) = 1$

ג. $f(1) = 3$

התשובה צריכה להינתן בנוסחה אחת.

22. (5%) תהא α זווית ברביע הראשון. נגדיר $u = \sin \alpha \cos \alpha$ ו- $v = \cot \alpha$. כתבו את v כפונקציה של u .

23. (5%) מצאו שני וקטורים שווי אורך במישור, \vec{u} ו- \vec{v} המקיימים:
 $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$ ו- $\vec{u} \perp \vec{v}$ (כלומר, הם ניצבים).