

## מבחן סיווג במתמטיקה 2.3.2016

מס' סטודנט:  פקולטה:

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה 5 נקודות או 0. סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

---

### ניקוד

|  |         |
|--|---------|
|  | שאלה 1  |
|  | שאלה 2  |
|  | שאלה 3  |
|  | שאלה 4  |
|  | שאלה 5  |
|  | שאלה 6  |
|  | שאלה 7  |
|  | שאלה 8  |
|  | שאלה 9  |
|  | שאלה 10 |
|  | שאלה 11 |
|  | שאלה 12 |
|  | שאלה 13 |
|  | שאלה 14 |
|  | שאלה 15 |
|  | שאלה 16 |
|  | שאלה 17 |
|  | שאלה 18 |
|  | שאלה 19 |
|  | שאלה 20 |
|  | סה"כ    |

### שאלה מס' 1

נתון ש- $2^{\log(a^2)} = 1024$ . מהו  $a$ ?

$$a = \boxed{\sqrt[4]{1024} = 4\sqrt{2}}$$

### שאלה מס' 2

תהא  $\beta = \arcsin(\sin \frac{10\pi}{3})$

$$\beta = \boxed{\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}}$$

### שאלה מס' 3

חשבו את  $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$

$$\boxed{\cos(\arcsin \frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

**פתרון: משתמשים בזהות:**  $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

$$\cos(\arcsin \frac{1}{3}) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin \frac{1}{3}))^2} = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2}$$
 **כך מקבלים:**

### שאלה מס' 4

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  כך שהפונקציה  $g(x) = \sin(f(x))$  מקיימת  $g'(2) = 10$ .

$$f(x) = \boxed{10x - 20}$$

### שאלה מס' 5

מצאו פונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$  ו- $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ .

$$f(x) = \boxed{\ln(\sin x) + 3}$$

פתרון:  $f(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln(\sin x) + c$  נציב  $f(\frac{\pi}{2}) = 3$  ונקבל  $c = 3$ .  
בדקו ע"י גזירת הפונקציה.

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

### שאלה מס' 6

מצאו פונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - (2x + 3)) = 0$ , ו- $(g(x) - (2x + 3)) \sin x > 0$  לכל  $x$  (נדרש שהפונקציה  $g(x)$  תהיה מוגדרת לכל  $x \geq 0$ ).

$$g(x) = \boxed{\frac{\sin x}{(x+1)^2} + 2x + 3}$$

### שאלה מס' 7

כתבו נוסחה לסדרה גיאומטרית  $a_n$  בת 3 איברים שסכומה הוא 2.

### שאלה מס' 8

חשבו את הגבול

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 10h) - \sin(\frac{\pi}{4})}{h} = \boxed{10 \cos(\frac{\pi}{4}) = 5\sqrt{2}}$$

פתרון: נכפול מונה ומכנה ב-10 ונקבל:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 10h) - \sin(\frac{\pi}{4})}{10h} \right] 10$$

הביטוי בסוגריים המרובעים הוא נגזרת של סינוס בנקודה  $\pi/4$  שהיא:  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ואת זה יש להכפיל

ב 10

## שאלה מס' 9

מצאו פונקציה רציפה  $f(x)$  שקבוצת הנקודות  $x$  המקיימות  $f(x) \geq 2$  היא  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  (כאן  $A \cup B$  מציין איחוד של  $A$  ו- $B$ ).

$$f(x) = \boxed{-(x+1)(x+2)(x-1)(x-2) + 2 = -(x^2-1)(x^2-4) + 2 = -x^4 + 5x^2 - 2}$$

**פתרון:**  $-(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)$ . מתאפס בנקודות  $1, -1, 2, -2$  וגדול מאפס בקטעים הנדרשים. כעת יש לבצע תיקון על מנת שיתקיים  $f(x) \geq 2$ . ברור שמבחינת חילופי הסימנים זה עובד, השאלה היא מהו הסימן לפני המכפלה. ציירו את גרף הפונקציה, היווכחו שאם מדובר במכפלה מן הסוג הזה, הפונקציה שואפת למינוס אינסוף כאשר  $x \rightarrow \infty$ , ולכן נחוץ סימן המינוס לפני המכפלה.

## שאלה מס' 10

מסמנים ב- $f^{(k)}(x)$  את הנגזרת ה- $k$  של  $f(x)$  בנקודה  $x$ . כתבו נוסחה לפונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f^{(k)}(3) = 0$  לכל  $0 \leq k \leq 4$ , ו- $f^{(5)}(3) = 12$  (חלק מתפקידכם הוא להבין מה פירוש  $f^{(0)}(x)$ ).

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{10}(x-3)^5}$$

## שאלה מס' 11

מצאו וקטור  $\vec{u} = (a, b)$  שהמקבילית שקדקודה בראשית ושתי צלעותיה הן  $\vec{u}$  ו- $\vec{v} = (1, 1)$  היא בעלת שטח 5.

$$a = \boxed{5} \quad b = \boxed{0}$$

**פתרון:** שטח מקבילית במישור ניתן לחשב ע"י  $S = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית בין הוקטורים. נזכור כי:  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  וכי  $\cos \alpha = \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

$$S = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)^2} = \sqrt{(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\vec{v})^2}$$

נקבל את הנתונים ונקבל  $5 = S = \sqrt{2(a^2 + b^2)^2 - (a+b)^2} = |a-b|$   
 כעת אפשר לבחור כל שני מספרים שהפרשם 5. למשל  $a = 5, b = 0$

הערה: אפשר גם לבצע ניחוש מושכל, או למשל להניח שהזווית ישרה (מלבן הוא גם מקבילית) ולפתור בצורה פשוטה יותר.

## שאלה מס' 12

מצאו נקודה במישור שמרחקה מן הנקודה  $(1, 2)$  הוא 3 ומרחקה מן הנקודה  $(7, 10)$  הוא 7.

$$x = \boxed{2.8} \quad y = \boxed{4.4}$$

פתרון: אפשר בדרך הסטנדרטית (והמייגעת) לסמן את הנקודה ע"י  $(x, y)$  ולהשתמש בנוסחאת מרחק בין שתי נקודות.

$$\begin{aligned} 3^2 &= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \quad \text{משמעו: } (1, 2) \text{ הוא } 3 \text{ משמעו:} \\ 7^2 &= (x - 7)^2 + (y - 10)^2 \quad \text{משמעו: } (7, 10) \text{ הוא } 7 \text{ משמעו:} \end{aligned}$$

כך נקבל שתי משוואות (ריבועיות) אם שני נעלמים שניתן לפתור.

דרך פשוטה יותר: נשים לב שהמרחק בין הנקודה  $(1, 2)$  לנקודה  $(7, 10)$  הוא  $\sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2} = 10$  לכן הנקודה המבוקשת נמצאת על הישר המחבר ביניהם ובעזרת יחסי פרופורציה נקבל את הנקודה המבוקשת.

## שאלה מס' 13

מצאו פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(x) = \frac{x-1}{x+1}$  ו- $f(3) = 7$ .

$$f(x) = \boxed{x - 2 \ln |x + 1| + 4(\ln 2 + 1)}$$

פתרון:  $f'(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+(1-1)-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

ע"י אינטגרציה נקבל:  $f(x) = x - 2 \ln |x + 1| + C$   
ומן התנאי ש- $f(3) = 7$  נובע (מציבים בביטוי  $x = 3$ ) ש- $C = 2 \ln 4 + 4 = 4(\ln 2 + 1)$ .

## שאלה מס' 14

מהו המקדם של  $x^2$  ב- $(1+x)^{10}$ ?

$$a_2 = \binom{10}{2} = 45$$

פתרון: נוסחאת הבינום של ניוטון

## שאלה מס' 15

מצאו ארבעה מספרים  $x, y, z, w$  ש- $x + 2y + 3z + w = 12$ ,  $x + 2y + 3z + 2w = 13$ ,  $x + 2y + 2z + 2w = 15$ ,  $x - 2y - 5z - w = 4$ .

$$x = \boxed{6} \quad y = \boxed{5.5} \quad z = \boxed{-2} \quad w = \boxed{1}$$

פתרון: מערכת משוואות לינאריות

## שאלה מס' 16

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמקבלת מקסימום מקומי ב- $x = 0$  ומינימום מקומי ב- $x = 2$ , ואינה קבועה בשום קטע. כתבו את הפונקציה בנוסחה אחת.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^3}{3} - x^2}$$

פתרון: הנגזרת של הפונקציה מתאפסת ב- $x = 0$  ו- $x = 2$ , כלומר  $f(x) = Ax(x - 2) = A(x^2 - 2x)$ . אם תציירו את הפונקציה תראו שהיא שואפת לאינסוף כש- $x \rightarrow \infty$  ולכן  $A > 0$ . אפשר לקחת  $A = 1$  (הרי מחפשים רק דוגמה אחת), ונקבל:  $f'(x) = x^2 - 2x$ , ולכן אפשר לקחת  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ . אפשר כאן להוסיף קבוע - אבל כאמור בקשו רק דוגמה של פונקציה אחת.

## שאלה מס' 17

מצאו פונקציה  $f(x)$  שהנגזרת שלה היא  $\frac{\ln(x^2)}{x}$ .

$$f(x) = \boxed{\ln^2 x}$$

פתרון:  $f(x) = \int \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \int \frac{2 \ln(x)}{x} dx = 2 \int \ln x d(\ln x) = \ln^2 x$  בדקו ע"י גזירת הפונקציה.

משתמשים בכלל:  $\ln a^x = x \ln a$  בכך ש- $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$

## שאלה מס' 18

כתבו נוסחה סגורה לסדרה  $a_n$  ש- $a_n - a_{n-1} = 2n$  לכל  $n$  ו- $a_1 = 10$ .

$$a_n = \boxed{10 + (n + 2)(n - 1)}$$

פתרון: כדי להבין משהו, כדאי תמיד לעשות דוגמאות פשוטות. במקרה זה, חישוב האיברים הראשונים בסדרה:

$$a_1 = 10, a_2 = a_1 + 4 = 10 + 4 = 14, a_3 = a_2 + 6 = (10 + 4) + 6 = 20, \dots$$

מזה מבינים ש- $a_n = 10 + (4 + 6 + \dots + 2n)$

נשים לב  $(4 + 6 + \dots + 2n)$  הוא סכום של סדרה חשבונית שאיברה הראשון הוא 4 ומכילה  $n - 1$  איברים.

$$\text{כלומר, } a_n = 10 + \frac{(4+2n)(n-1)}{2} = 10 + (n + 2)(n - 1)$$

### שאלה מס' 19

נתון ש- $\cos \alpha = b$ . בטאו בעזרת  $b$  את  $\cos 4\alpha$ .

$$\cos 4\alpha = \boxed{2(2b^2 - 1)^2 - 1}$$

**פתרון:** נשתמש בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  לכן  
 $\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 = 2(2b^2 - 1)^2 - 1$

### שאלה מס' 20

מהי השארית של  $x^3 + x^2 + x + 1$  בחלוקה ב- $x^2 + x + 1$ ?

$$\boxed{1}$$

**פתרון:** חלוקה עם שארית (אפשר לבצע חלוקת פולינומים)  $x^3 + x^2 + x + 1 = x(x^2 + x + 1) + 1$