

מבחן סיווג במתמטיקה 30.3.2016

מס' סטודנט: פקולטה:

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה 5 נקודות או 0. סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	שאלה 5
	שאלה 6
	שאלה 7
	שאלה 8
	שאלה 9
	שאלה 10
	שאלה 11
	שאלה 12
	שאלה 13
	שאלה 14
	שאלה 15
	שאלה 16
	שאלה 17
	שאלה 18
	שאלה 19
	שאלה 20
	סה"כ

שאלה מס' 1

חשבו את $\log_{(7^2)} 7^3$.

$$\log_{(7^2)} 7^3 = \log_{7^2} (7^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

שאלה מס' 2

תהא $\beta = \arcsin(\sin \frac{100\pi}{3})$

$$\beta = \frac{100\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

שאלה מס' 3

מהו $\arcsin(1/3) + \arccos(1/3)$

$$\frac{\pi}{2}$$

פתרון: משתמשים בזהות $\cos \beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$

שאלה מס' 4

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ כך שהפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ מקיימת $g'(3) = 100$.

$$f(x) = 10\sqrt{x}$$

שאלה מס' 5

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ ו- $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

$$f(x) = -\frac{1}{\sin x} + 4$$

פתרון: $f(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) = -\frac{1}{\sin x} + c$. נציב $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ ונקבל $c = 4$. בדקו ע"י גזירת הפונקציה.

משתמשים בכך ש- $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

שאלה מס' 6

מצאו פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x \neq 0$ ומקיימת: $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 7$ ו- $f(x) > \frac{7}{x}$ לכל x .

$$f(x) = \boxed{\frac{7}{x} + 1}$$

שאלה מס' 7

כתבו נוסחה לסדרה חשבונית לא קבועה a_n ($n = 1, \dots, 10$) בת 10 איברים שסכומה הוא 4. כתבו את האיבר הראשון של הסדרה, a_1 , ואת ההפרש שלה, d .

$$a_1 = \boxed{1} \quad d = \boxed{-\frac{2}{15}}$$

פתרון: אפשר להשתמש בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית: $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$ כאשר: $n = 10$ ניתן לקבוע כרצוננו את a_1 או את d הערך שלא קבענו נקבע בהתאם לנוסחה

שאלה מס' 8

חשבו את הגבול

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^h - 1}{2h} = \boxed{0}$$

פתרון:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^h - 1}{2h} = \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^h - 1}{h} \right]$$

הביטוי בסוגריים המרובעים הוא נגזרת של הפונקציה $f(x) = x^{x-1}$ בנקודה $x_0 = 1$
 $f'(x) = x^{x-1}(\ln x + \frac{x-1}{x})$ נציב 1 ונקבל $f'(1) = 0$ את זה יש לחלק ב 2

שאלה מס' 9

מצאו פולינום $p(x)$ ממעלה 4 ששורשיו היחידים הם 1, 2, 3, 3 ומקיים $p(0) = 10$.

$$p(x) = \boxed{\frac{5}{9}(x-1)(x-2)(x-3)^2}$$

שאלה מס' 10

מסמנים ב- $f^{(k)}(x)$ את הנגזרת ה- k של $f(x)$ בנקודה x . כתבו נוסחה לפונקציה $f(x)$ המקיימת: $f^{(k)}(3) = 0$ לכל $0 \leq k \leq 4$ ו- $f^{(5)}(3) = 12$ (חלק מתפקידכם הוא להבין מה פירוש $f^{(0)}(x)$).

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{10}(x-3)^5}$$

שאלה מס' 11

מצאו וקטור $\vec{u} = (a, b)$ ניצב לוקטור $\vec{u} = (3, 4)$, ארוך מ- \vec{u} פי 3 וקואורדינטת ה- x שלו חיובית.

$$a = \boxed{12} \quad b = \boxed{-9}$$

פתרון: הוקטור $(-\frac{4}{3}b, b)$ ניצב לוקטור הנתון. למה?

כעת נדרש שיתקיים $\sqrt{(-\frac{4}{3}b)^2 + b^2} = 3\sqrt{3^2 + 4^2}$. ולכן $b = 9$ או $b = -9$. לבסוף נדרש שקואורדינטת ה- x שלו חיובית ולכן חייב להתקיים $b = -9; a = 12$

שאלה מס' 12

כתבו את פתרון אי שוויון הבא כאיחוד של קטעים:

$$|x - 2| + |x - 3| \leq 4$$

אם מדובר בפחות מ-3 קטעים, כתבו * בשלישי. (הסימון לאיחוד הוא \cup).

$$\boxed{[0.5, 4.5]} \cup \boxed{*} \cup \boxed{*}$$

שאלה מס' 13

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ ו- $f(3) = 7$.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x+1| + 5.5 - 2 \ln 4}$$

פתרון: בעזרת חלוקת פולינומים נקבל: $\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$

$$\text{נחשב } f(x) = \int \frac{x^2+1}{x+1} dx = \int (x - 1 + \frac{2}{x+1}) dx = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x + 1| + C$$

$$\text{נציב } f(3) = 7 \text{ ונקבל } C = 5.5 - 2 \ln 4 = 5.5 - 4 \ln 2$$

שאלה מס' 14

מהו המקדם של x^2 ב- $(1+x)^{100}$?

$$\boxed{a_2 = \binom{100}{2} = 4950}$$

פתרון: נוסחאת הבינום של ניוטון

שאלה מס' 15

מצאו שלושה מספרים $x \leq y \leq z$ שסכומם הוא 20, ו- $z - y = y - x = x^{-1}$

$$x = \boxed{\frac{10}{3}} \quad y = \boxed{\frac{20}{3}} \quad z = \boxed{10}$$

שאלה מס' 16

חשבו את הסכום $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^9}$ (כתבו כביטוי שאינו סכום, אלא ביטוי אחד).

$$sum = \boxed{\frac{1 - (-\frac{1}{3})^{10}}{\frac{4}{3}} = \frac{3^{10} - 1}{4(3)^9}}$$

פתרון: נשתמש בנוסחא לסכום של סדרה הנדסית $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ כאשר: $a_1 = 1$ $q = -\frac{1}{3}$ $n = 10$

שאלה מס' 17

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $\frac{\ln(x^2)}{\ln x}$.

$$f(x) = \boxed{2x = 2 \ln e^x}$$

פתרון: מחוקי \ln נקבל $\frac{\ln(x^2)}{\ln x} = \frac{2 \ln x}{\ln x} = 2$

שאלה מס' 18

כתבו נוסחה סגורה לסדרה a_n ש- $a_n - a_{n-1} = (-1)^n$ לכל n ו- $a_1 = 10$.

$$a_n = \boxed{10 + \frac{((-1)^{n-1} - 1)}{-2} = 10.5 + \frac{1}{2}(-1)^n}$$

פתרון: סדרת הפרשים היא סדרה הנדסית שבה $q = -1$ ושאיברה הראשון הוא 1 ולכן סכומה

$$a_n = a_1 + S_{n-1} \text{ ולכן } S_{n-1} = \frac{1((-1)^{n-1} - 1)}{(-1) - 1}$$

שאלה מס' 19

נתון ש- $\tan \alpha = b$. בטאו בעזרת b את $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = \boxed{\frac{1-b^2}{1+b^2}}$$

פתרון: נשתמש בזהויות: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

שאלה מס' 20

נתון שהפולינום $x^3 + x^2 + ax + b$ מתחלק בפולינום $(x - 1)(x - 2)$. חשבו את a ואת b .

$$a = \boxed{-10} \quad b = \boxed{8}$$

פתרון: השוואת מקדמים או וויטה