

מבחן סיווג במתמטיקה 06.10.2016 פיתרון

מס' סטודנט: פקולטה:

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה מלא או 0. סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

ניקוד

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	שאלה 5
	שאלה 6
	שאלה 7
	שאלה 8
	שאלה 9
	שאלה 10
	שאלה 11
	שאלה 12
	שאלה 13
	שאלה 14
	שאלה 15
	שאלה 16
	שאלה 17
	שאלה 18
	שאלה 19
	שאלה 20
	סה"כ

שאלה מס' 1

מצאו $n \in \mathbb{N}$ כך שהמספר x המקיים $7^x + 7^{x+1} = 2016$ מקיים $n < x < n + 1$.

$$n = \boxed{2}$$

פיתרון:

$$2016 = 7^x + 7^{x+1} = 7^x(1 + 7) = 7^x \cdot 8$$

לכן $7^x = 252$ כלומר $2 < x < 3$ ולכן $n = 2$

שאלה מס' 2

מצאו את a_{10} עבור סדרה הנתונה ע"י $a_n = \log_6 \frac{2}{3} + \log_6 \frac{3}{4} + \dots + \log_6 \frac{n+1}{n+2}$

$$a_{10} = \boxed{-1}$$

פיתרון:

$$a_{10} = \log_6 \frac{2}{3} + \log_6 \frac{3}{4} + \dots + \log_6 \frac{11}{12} = (\log_6 2 - \log_6 3) + (\log_6 3 - \log_6 4) + \dots + (\log_6 11 - \log_6 12)$$

נשים לב שכל המחוברים הפנימיים מתבטלים ולכן,

$$a_{10} = \log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 \frac{2}{12} = \log_6 6^{-1} = -1$$

שאלה מס' 3

נתונה סדרה חשבונית המקיימת $a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 125$
מצאו את S_{17} (סכום 17 האיברים הראשונים בסדרה a_n)

$$S_{17} = \boxed{425}$$

פיתרון:

$$125 = a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = (a_1 + 2d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 8d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 14d) = 5a_1 + 40d$$

$$S_{17} = (a_1 + a_{17}) \frac{17}{2} = \frac{(2a_1 + 16d)17}{2} = 17(a_1 + 8d) = 425$$

שאלה מס' 4

כתבו את פתרון אי שוויון הבא כאיחוד של קטעים:

$$|x - 2| \leq |x - 3|$$

אם מדובר בפחות מ-3 קטעים, כתבו * בתיבות הריקות. (הסימון לאיחוד הוא \cup).

$$\boxed{(-\infty, 2.5]} \cup \boxed{*} \cup \boxed{*}$$

פיתרון: שרטטו על ציר המספרים הממשי

שאלה מס' 5

יהיו \vec{u} , \vec{v} וקטורים כך שמתקיים $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{u}| = 5$

נתון שהוקטור $\vec{u} - 2\vec{v}$ ניצב לוקטור $\vec{u} + \vec{v}$

חשבו את $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boxed{7}$$

פיתרון:

מכיוון שהוקטורים ניצבים מתקיים $(\vec{u} - 2\vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$$0 = |\vec{u}|^2 + \vec{u}\vec{v} - 2\vec{v}\vec{u} - 2|\vec{v}|^2 = 25 - \vec{u}\vec{v} - 18$$

$$\vec{u}\vec{v} = 7 \text{ לכן}$$

שאלה מס' 6

נתון ש- $\tan \alpha = \frac{m}{n}$. בטאו בעזרת m, n את $m \sin 2\alpha + n \cos 2\alpha$

$$\boxed{n}$$

פיתרון:

$$m \sin 2\alpha + n \cos 2\alpha = n \left(\frac{m}{n} (2 \sin \alpha \cos \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right) =$$

$$= n \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (2 \sin \alpha \cos \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right) = n$$

הערה: יש לשים לב שהנתון $\tan \alpha = \frac{m}{n}$ לא גורר בהכרח $\sin \alpha = m$ וגם $\cos \alpha = n$.

למשל יתכן $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ואז ברור שלא יתכן $\sin \alpha = 2$ וגם $\cos \alpha = 3$.

למעשה m ו- n בכלל לא חייבים להיות שלמים.

שאלה מס' 7

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f'(x) = \frac{x^2-1-3x}{x+1}$ בכל נקודה $x \neq -1$, ו- $f(0) = 1$

$$f(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - 4x + 3 \ln |x + 1| + 1}$$

פיתרון:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^2 - 1 - 3x}{x + 1} dx = \int \frac{(x - 1)(x + 1) - 3(x + 1) + 3}{x + 1} dx = \\ &= \int \frac{(x + 1)(x - 1 - 3) + 3x}{x + 1} dx = \int (x - 4 + \frac{3}{x + 1}) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 3 \ln |x + 1| + c \end{aligned}$$

כעת נציב $f(0) = 1$ לקבלת התשובה הסופית
הערה: אפשר להגיע לביטוי $x - 4 + \frac{3}{x+1}$ גם ע"י חלוקת פולינומים

שאלה מס' 8

מצאו פונקציה $f(x)$ שהנגזרת שלה היא $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$.

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + c}$$

שאלה מס' 9

תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ שחסומה בקטע $(0, 1)$, יש לה שם מינימום אבל אין לה מקסימום.

$$f(x) = \boxed{(x - 0.5)^2}$$

שאלה מס' 10

מצאו פולינום ממעלה 3 שמתאפס רק ב- $x = 0$ ומקבל מינימום מקומי ב- $x = 5$ ומקסימום מקומי ב- $x = 3$.

$$p(x) = \boxed{x(x^2 - 12x + 45)}$$

שאלה מס' 11

מצאו זווית α ש- $\frac{\sqrt{2}}{4} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$. כתבו את α ברדיאנים ובמעלות.

$$\alpha = \boxed{22.5^\circ}$$

$$\alpha = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

פיתרון:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ או } 2\alpha = 45^\circ \text{ לכן}$$

שאלה מס' 12

נתון: $\log_2(1024) = \log_{\sqrt{10}}(z)$. אזי

$$z = \boxed{10^5}$$

שאלה מס' 13

מצאו שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שאינן כפולה האחת של האחרת במספר קבוע, המקיימות $f''(x) = 3f(x)$ ו- $g''(x) = 3g(x)$.

$$f(x) = \boxed{e^{\sqrt{3}x}}$$

$$g(x) = \boxed{\frac{1}{e^{\sqrt{3}x}} = e^{-\sqrt{3}x}}$$

אפשרות נוספת (סכום של הפונקציות)

$$\boxed{e^{\sqrt{3}x} + e^{-\sqrt{3}x}}$$

שאלה מס' 14

נתון ש- $f'(x) = 2f(x)$ לכל x , ו- $f(0) = 5$. מהו $f(10)$?

$$f(10) = \boxed{5e^{20}}$$

שאלה מס' 15

כתבו את האיבר השני a_2 של סדרה גיאומטרית (הנדסית) אינסופית שסכומה הוא 4 ושהאיבר הראשון בה a_1 הוא 2

$$a_2 = \boxed{1}$$

שאלה מס' 16

נתון שפונקציה ריבועית $f(x)$ מקבלת מינימום ב- $x = 10$ ו- $f(20) = 3$. מצאו עוד ערך של הפונקציה שאתם יכולים לדעת בבטחה, רק מן הנתונים האלה:

$$f(\boxed{0}) = \boxed{3}$$

שאלה מס' 17

עבור אילו ערכים של a ושל b הפונקציה הבא רציפה

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} 3^{x+2} & x \leq -2 \\ ax + 7 & -2 < x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 7 & 0 < x \end{cases}$$

$$a = \boxed{3}$$

$$b = \boxed{\text{כל מספר ממשי}}$$

שאלה מס' 18

חשבו את רדיוס העיגול $x^2 + 2x + y^2 + 4y \leq 4$

$$\boxed{3}$$

שאלה מס' 19

מהי הפונקציה ההפוכה ל- $f(x) = (\arcsin(\sqrt{x}))^3$? כתבו ערך אחד של x שבה הפונקציה ההפוכה מוגדרת (x_1) , וערך אחד שבו אינה מוגדרת (x_2) .

$$f^{-1}(x) = \boxed{\sin^2(\sqrt[3]{x})}$$

$$x_1 = \boxed{3}$$

$$x_2 = \boxed{-1}$$

שאלה מס' 20

כתבו פונקציה שהמחזור שלה הוא 10, והיא מתאפסת ב- $x = 3$

$$f(x) = \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 3)\right)}$$