תרגילים בנושא גבולות

שאלה מס' 1

חשבו את הגבולות הבאים או הסבירו מדוע הגבול לא קיים

א.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin(x/2)\frac{\sin(x/2)}{x/2}$$

הסבר: נשתמש בנוסחה: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ **לפיה** $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$
מתקיים $\lim_{x\to 0}\sin(x/2)=0$ **(ברור לעצמכם שהדבר אומר בפשטות שהפונקציה** $\sin(x/2)$ **רציפה ב־**$x=0$**).**
כמו כן $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=1$ **(מותר להשתמש בכך ש־**$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$**).**
לכן

$$\lim_{x\to 0}\sin(x/2)\frac{\sin(x/2)}{x/2}=0\cdot 1=0.$$

ב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2$$

השתמשו בעובדה ש־ $1-\cos 2x=2\sin^2 x$**. ובעובדה ש־** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$**.**

ג.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}-(\cos x+\sin x)=-1$$

בחישוב השתמשנו בנוסחה לקוסינוס של זוויות כפולה ובנוסחת כפל מקוצר.

ד.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{10}x}{\log_{100}(x+1)}=\frac{\log_{10}x}{\frac{\log_{10}(x+1)}{log_{10}100}}=2$$

ה.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x+1}=0$$

פונקצית הסינוס היא פונקציה חסומה שמקבלת ערכים בין -1 ל־ 1. הביטוי במכנה שואף לאינסוף כאשר x הולך לאינסוף וכאשר מחלקים משהו חסום במספרים הולכים וגדלים, המנה שואפת לאפס.

ו. שימוש בזהות של קוסינוס של זווית כפולה.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin(\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0}\sin(\frac{x}{2})=0$$

ז.

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1-\cos x}{x^3}\right)$$

תחילה נחשב את הגבול של הביטוי שבתוך הסינוס:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\pm\infty$$

כיוון שלסינוס אין גבול באינסוף אז לפונקציה אין גבול כאשר x שואף ל־0.

שאלה מס' 2

אילו מן הביטויים הבאים שואפים ל־0 כאשר $x\to\infty$? סמנו V ליד הביטויים ששואפים ל־0.

$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{1-x}$	V
$\frac{\log_2 x}{\sqrt{x}}$	V

פתרון: בתרגיל הראשון הביטוי במונה חסום. המכנה שואף ל־ $-\infty$ וכאשר מחלקים מספר חסום במספרים גדולים שליליים, המנה הולכת ומתקרב ל־0 ולכן הגבול הוא 0.
בביטוי השני משתמשים בכך שהלוגריתם שואף לאינסוף הרבה יותר לאט מכל חזקה חיובית, בוודאי יותר לאט משורש

שאלה מס' 3

תנו דוגמה לפונקציות $f(x),g(x)$ ש־ $\frac{f(x)}{g(x)}$ אינו קבוע, ו־$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=3$.
דוגמאות:

$$f(x)=3x^2+5 \qquad g(x)=x^2+2x$$

$$f(x)=\sin(3x) \qquad g(x)=x$$

שאלה מס' 4

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ שמוגדרת לכל $x\neq 5$, ולגרף $y=f(x)$ יש אסימפטוטה משופעת $y=2x+3$ כאשר x שואף לאינסוף (שפירושו ש־ $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(2x+3))=0$),
ואסימפטוטה אנכית $x=5$ (שפירושה ש־$f(x)$ שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף כאשר $x\to 5^+$ ו/או כאשר $x\to 5^-$).
דוגמא:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x}{x-5}$$

הסבר: כיוון שלפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x=5$, נרצה לבנות פונקציה רציונלית עם מכנה $x-5$ והמונה הוא איזשהו פולינום ממעלה שנייה (אם הפולינום במונה יהיה ממעלה ראשונה אז לפונקציה תהיה אסימפטוטה אופקית ולא משופעת), כלומר הפונקציה הדרושה תהיה $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-5}$. מתקיים: $f(x)-(2x+3)=\frac{(a-2)x^2+(b+7)x+c+15}{x-5}$. כדי שהגבול יהיה 0 כאשר משאיפים את x לאינסוף, נדרוש שהמעלה של הפולינום במונה תהיה קטנה מהמעלה של הפולינום במכנה, כלומר 0. לכן, $a=2,b=-7$.
המקדם החופשי יכול להיות כל מספר כל עוד $x=5$ אינו שורש של הפולינום במונה (כי, אחרת לא תתקיים הדרישה של האסימפטוטה האנכית). נבחר $c=0$.

שאלה מס' 5

מצאו פונקציה $f(x)$ שהגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו קיים, אפילו במובן המוכלל (כלומר אפילו אין לפונקציה גבול שהוא אינסוף או מינוס אינסוף), אבל $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (רמז - קחו פונקציה מהצורה $(\sin(g(x))$.

דוגמאות:

$$f(x) = \sin(\ln x) \ or \ f(x) = \sin(\frac{1}{x})$$

הסבר: כיוון שפונקציות הסינוס והקוסינוס הן פונקציות חסומות, נרצה למצוא פונקציה $g(x)$ שהנגזרת שלה תשאף ל-0 כאשר x שואף לאינסוף. כאשר נגזור את הפונקציה המורכבת $f(x) = \sin(g(x))$ נקבל $f'(x) = \cos(g(x))g'(x)$ וכאשר נשאיף את x לאינסוף נקבל ביטוי חסום כפול ביטוי ששואף ל-0 שזה ביטוי ששואף ל-0.

שאלה מס' 6

אילו מן הביטויים הבאים שואפים ל-∞ כאשר $x \to \infty$?

$$\frac{x^2}{|1-x|} \quad \boxed{\text{V}}$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_{10} x} \quad \boxed{}$$

$$\frac{x\log_2 x}{\log_{10} x} \quad \boxed{\text{V}}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{|1-x|} = \infty$$

הביטוי שבתוך הערך המוחלט שלילי עבור ערכים חיוביים גדולים. ולכן המכנה הוא מהצורה $x-1$, וכיוון שהמעלה במונה גדולה מהמעלה במכנה נקבל שהגבול הוא אינסוף.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_{10} x} = \log_2 10$$

נשנה את הבסיס של הביטוי במכנה ל-2 ונקבל את הדרוש.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_2 x)\times x}{\log_{10} x} = \infty$$

זהו אותו הביטוי כמו בסעיף הקודם רק כפול x ולכן המכפלה שואפת לאינסוף.

שאלה מס' 7

חשבו את הגבול הבא או הסבירו מדוע אינו קיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

פתרון: המונה הוא סכום של סדרה חשבונית ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$