

### פתרון תרגילים בנושא סדרות ואינדוקציה

**תרגיל 1:** נתונה סדרה גיאומטרית  $a_1, a_2, a_3$ . נתון ש-  $a_1 = 2$  וסכום הסדרה הוא 0. מצאו את מנת הסדרה.

**פתרון:** נסמן את מנת הסדרה ב- $q$ , אז ניתן לכתוב את הסדרה באופן הבא:  $2, 2q, 2q^2$ . נתון שהסכום הוא 0, כלומר  $2 + 2q + 2q^2 = 0$ . נותר לפתור את המשוואה ולמצוא את  $q$ , אבל אחרי בדיקה, מקבלים שלמשוואה אין שורשים ממשיים ולכן אין סדרה המקיימת את הנתונים.

**תרגיל 2:** נתון שסכומה של סדרה הנדסית בת 10 איברים הוא  $\pi$  ושמתה היא 2. ממשיכים את הסדרה 10 איברים נוספים. מהו סכומה?

**פתרון א' (שגורתי):** לפי הנוסחה לסכום של הסדרה ההנדסית, מקבלים  $\pi = \frac{a_1(2^{10}-1)}{2-1}$ . לכן אם נציב את  $a_1$  בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית באורך 20, נקבל

$$S_{20} = a_1 \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = \frac{\pi}{2^{10} - 1} (2^{20} - 1) = \frac{\pi}{2^{10} - 1} (2^{10} - 1) (2^{10} + 1) = 1025\pi$$

**פתרון ב' (עם רעיון):** האיבר ה-11 בסדרה גדול מן האיבר הראשון פי  $2^{10} = 1024$ . האיבר ה-12 בסדרה גדול מן האיבר השני פי  $2^{10} = 1024$ . האיבר ה-13 בסדרה גדול מן האיבר השלישי פי  $2^{10} = 1024$ .  
... האיבר ה-20 בסדרה גדול מן האיבר העשירי פי  $2^{10} = 1024$ . המסקנה - סכום 10 האיברים החל מן המקום ה-11 גדול פי 1024 מן הסכום של עשרה האיברים הראשונים, שהוא  $\pi$ . הסכום הכולל הוא אם כן  $1025\pi$ .

**תרגיל 3:** חשבו את הממוצע של המספרים 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

**פתרון:** כפי שראיתם בוידאו מתקיים  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ . במקרה שלנו,  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$ . סיכמנו 11 מספרים ולכן הממוצע הוא  $\frac{2047}{11}$ . (מי שלא זוכר את הנוסחה, יכול להשתמש בנוסחה הרגילה לסכום סדרה הנדסית ומקבלים  $\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$ .)

**תרגיל 4:** חשבו את הממוצע של המספרים  $1, 2, 4, \dots, 2^n$ .

**פתרון:** באותו אופן כמו בתרגיל הקודם הממוצע הוא  $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ .

**תרגיל 5:** בסדרה גיאומטרית בת 4 איברים שאיברה הראשון הוא 1 סכום האיברים הוא 4. מהן האפשרויות למנה  $q$  של הסדרה?

**פתרון:** אברי הסדרה הם:  $1, q, q^2, q^3$ . מהנתון מתקיים  $1 + q + q^2 + q^3 = 4$ , כלומר צריך למצוא פתרון למשוואה  $q^3 + q^2 + q - 3 = 0$ . בעזרת הניחוש או בעזרת הניחוש האינטליגנטי ניתן לנחש את אחד הפתרונות שהוא  $q = 1$ . כדי למצוא את שאר השורשים נבצע חלוקת פולינומים ונקבל את הפולינום  $q^2 + 2q + 3$ . לפולינום אין שורשים ממשיים, אבל מי שמכיר קצת מספרים מרוכבים יכול למצוא את שאר השורשים.