תרגילים בנושא וקטורים

תרגיל 1: יהא ABC משולש, ונסמן $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$.

א. כתבו בעזרת $\vec{u}, \vec{v}$ את הוקטור המחבר את A עם אמצע הצלע BC.

ב. כתבו בעזרת $\vec{u}, \vec{v}$ את הוקטור המחבר את A עם נקודה D על הצלע BC המקיימת $|BD| : |DC| = 2$.

ג. כתבו בעזרת $\vec{u}, \vec{v}$ את הוקטור המחבר את A עם נקודה Q על הצלע BC כך ש-AQ חוצה את הזווית $\angle A$. (תזכורת למשפט גיאומטרי: חוצה הזווית במשולש מחלק את הצלע ממולו ביחס זהה ליחס בין צלעות המשולש שתוחמות את הזווית).

פתרון:

א. מתקיים $\vec{BC} = \vec{v} - \vec{u}$, ולכן האורך הדרוש הוא $\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.

ב. כיוון ש- $|BD| : |DC| = 2$, מתקיים $|BD| : |BC| = \frac{2}{3}$ ולכן $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{u} + \frac{2}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v})$.

ג. מהמשפט המוזכר בשאלה ידוע ש- $|BQ| : |QC| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$, ולכן

$$\frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}| + |\vec{v}|}$$

כלומר

$$\vec{AQ} = \vec{AB} + \vec{BQ} = \vec{u} + \left(\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}| + |\vec{v}|}\right)(\vec{v} - \vec{u}) = \left(\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}| + |\vec{v}|}\right)\vec{u} + \left(\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}| + |\vec{v}|}\right)\vec{v}$$

תרגיל 2: מצאו שני וקטורים שווי אורך ניצבים במישור שסכומם הוא $(2, 3)$. (רמז: הסבירו לעצמכם תחילה מדוע אם אחד הוקטורים הוא (a, b) אז הוקטור האחר הוא $(-b, a)$).
פתרון:

$$(2.5, 0.5), \quad (-0.5, 2.5)$$

העובדה שהניצב לוקטור (a, b), שיש לו אותו אורך כמו (a, b) הוא $(-b, a)$ היא עובדה שאפשר להוכיח בכמה דרכים. היווכחו תחילה בכך שיש לשניהם אותו אורך - $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, וגם $|(-b, a)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. את העובדה שהם ניצבים אפשר להוכיח ממשפט שלמדתם בתיכון (וקל להוכיח), שמכפלת השיפועים של ישרים ניצבים היא (-1). אפשר גם להשתמש במכפלה סקלרית, למי שמכיר: שני וקטורים הם ניצבים אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם היא 0, ובמקרה זה $(a, b) \cdot (-b, a) = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$. זה היה

הסבר לרמז. עכשיו הפתרון. שני הוקטורים שלנו הם (a,b) ו־ $(-b,a)$, והנתון הוא: $(a,b)+(-b,a)=(2,3)$ שפירושו $a-b=2, b+a=3$. פתרון מערכת המשוואות נותן את מה שבמסגרת.

תרגיל 3: מצאו וקטור באורך 3 שזוויתו עם ציר y היא $30°$.
פתרון:

$$(a,b)=(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$$

ציירו את הוקטור הנתון בשאלה, וחשבו את אורכי שני הניצבים של המשולש הנוצר עם ציר y (או עם ציר x).

תרגיל 4: מצאו שני וקטורים שווי אורך שהזווית ביניהם היא $60°$ וסכומם הוא $(1,0)$.
פתרון:

$$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}),\ (\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6})$$

שני וקטורים שווי אורך שסכומם הוא וקטור על ציר x יוצרים זווית שווה עם ציר x. במקרה זה הזווית היא 30^0. נסמן את הוקטורים $((a,b),(a,-b))$. מתקיים $2a=1$, כלומר $a=\frac{1}{2}$. כדי למצוא את b נשתמש במשולש ישר זווית שנוצר על יד הוקטור הראשון עם ציר ה־ x. נתון שהזווית היא 30^0 ואורך הניצב שנמצא על ציר ה־ x הוא $\frac{1}{2}$. אנחנו צריכים למצוא את הניצב השני. בעזרת ההגדרה של טנגנס מקבלים ש־ $b=\frac{\sqrt{3}}{6}$