

תרגילים בנושא טריגונומטריה

תרגיל 1: אילו מהזהויות הטריגונומטריות הבאות נכונות? אם אתם טוענים שהזהות אינה נכונה, הראו זאת על ידי הצבת ערך מסוים של x

$$1. \sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$2. \cos(\pi/2 + x) = -\sin x$$

$$3. \sin(3x) = 2 \sin(x) \cos^2(x) + \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)$$

$$4. \cos(2013\pi + x) = \cos x$$

פתרון: את שני הסעיפים הראשונים ניתן להוכיח בעזרת חפיפת משולשים במעגל היחידה. סעיף 3:

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) \\ &= 2 \sin(x) \cos(x) \cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \sin(x) \end{aligned}$$

וזה שווה לאגף הימין.

סעיף 4: $\cos(2013\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$, למשל עבור $x = 0$, באגף שמאל נקבל -1 ובאגף ימין נקבל 1 .

תרגיל 2: תהא α זווית ברביע הראשון. נגדיר $u = \sin \alpha \cos \alpha$ ו- $v = \cot \alpha$. כתבו את v כפונקציה של u .

פתרון:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{u}{\sin^2 \alpha}$$

נותר להביע את $\sin^2 \alpha$ באמצעות u . נסמן $t = \sin^2 \alpha$. מתקיים

$$t^2 = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = t - u^2$$

כלומר, צריך לפתור את המשוואה $t^2 - t + u^2 = 0$. הפתרונות הם

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4u^2}}{2}$$

נבדוק עבור אילו ערכי u יש למשוואה פתרון: $1 - 4u^2 \geq 0$ אם $u^2 \leq \frac{1}{4}$ אם $-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$ אם $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$ כלומר לכל u יש לפחות פתרון אחד למשוואה. בנוסף, הביטוי מתחת לשורש הוא לכל היותר 1 ולכן $t \geq 0$ שזה בדיוק תחום ההגדרה של t . לסיכום,

$$\cot \alpha = \frac{u}{\sin^2 \alpha} = \frac{u}{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4u^2}}{2}}$$

תרגיל 3: לאילו מאי השוויונות הבאים קבוצת הפתרונות היא $(-\infty, \infty)$?

1. $\cos^4 x + \sin^4 x \leq 1$

2. $\cos^4 x + \sin^4 x < 1$

פתרון:

1. נחקור את הפונקציה $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ ונמצא את נקודות הקיצון. מהחקירה מקבלים שנקודות המקסימום של הפונקציה הן $(\frac{\pi}{2}k, 1)$ ולכן לכל מספר ממשי x מתקיים $f(x) \leq 1$, כלומר קבוצת הפתרונות היא $(-\infty, \infty)$.

2. בסעיף הקודם מצאנו נקודות בהן $f(x) = 1$ ולכן אוסף הפתרונות הוא לא $(-\infty, \infty)$.

תרגיל 4: כמה פתרונות יש למשוואה הבאה בתחום הנתון?

$\sin x + \cos x = 0$ בתחום $[-\pi, \pi]$.

פתרון: מחפשים פתרונות למשוואה $\cos x = -\sin x$. מחפשים זווית בה הגדלים של הקוסינוס והסינוס שווים וזה קורה ב- $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$. מצד שני, נרצה שהסינוס והקוסינוס יהיו הפוכי סימן, כלומר ברביע שני ורביעי ולכן יש שני פתרונות למשוואה בתחום הנתון: $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

תרגיל 5: מצאו זווית α ברביע השלישי כך ש- $\cot(\alpha) = \sqrt{3}$

פתרון:

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}$$

הסבר: $\cot \alpha = \sqrt{3}$ אם ורק אם $\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi k$. כיוון שנתון שהזווית נמצאת ברביע השלישי נבחר $k = 1$.

תרגיל 6: חשבו את $\tan(19.25\pi)$, כשהזווית נתונה ברדיאנים.

פתרון:

$$\tan(19.25\pi) = 1$$

כיוון שהמחזור של טנגנס הוא π , מתקיים $\tan(19.25\pi) = \tan(0.25\pi) = 1$.