פתרונות תרגילים בנושא פולינומים ופונקציות

שאלה מס' 1

מצאו פולינום עם מקדמים ממשיים ששורשיו (הנקודות בהן הוא מתאפס) הם $0,0$ ו־3.
פתרון:

$$f(x) = x^2(x-3)$$

שאלה מס' 2

תנו דוגמה לשני פולינומים שונים ממעלה 3 שיש להם בדיוק שורש אחד משותף.
דוגמא:

$$f(x) = x^2(x-3) \qquad g(x) = (x+1)^2(x-3)$$

שאלה מס' 3

מהו המקדם של x^9 כשפותחים סוגריים בביטוי $(1+x)^{10}$?
פתרון: משתמשים בנוסחת הבינום ומקבלים $a_9 = 10$.

שאלה מס' 4

תנו דוגמה למשוואה ממעלה שלישית שיש לה בדיוק שני פתרונות.

פתרון: אם ניקח פולינום ממעלה שלישית, אז יהיו לו שלושה שורשים. כדי שיהיו שני פתרונות בדיוק, נרצה שאחד השורשים יהיה שורש כפול, למשל, $x^2(x-1)=0$.

שאלה מס' 5

מצאו פולינום $p(x)$ כך ש־ $x^7+1 = p(x)(x+1)$.

פתרון: אפשר לבצע חלוקת פולינומים ולמצוא את הפולינום הדרוש ואפשר לשים לבש שזו בדיוק הנוסחה לסכום סדרה הנדסית עם מנה $q=-x$, כלומר $p(x) = \frac{x^7+1}{x+1} = \frac{1-(-x)^7}{1-(-x)}$. $p(x) = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$.

שאלה מס' 6

רשמו את הביטוי $10x^2+10x+100$ **בצורה** $a(x+b)^2+c$.

פתרון: נבצע השלמה לריבוע:

$$10\left(x^2+x+10\right) = 10\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 10\right) = 10\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 97.5$$

שאלה מס' 7

מצאו פולינום $p(x)$ ממעלה 2 המקיים $p(0)=1,\ p'(0)=1,\ p''(0)=1$.

$$p(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$$

פתרון: ניקח פולינום המקיים $p''(x)=0$ **ונבצע פעמיים אינטגרציה תוך כדי הצבת הנתונים למציאת מקדם האינטגרציה.**

שאלה מס' 8

מצאו פולינום $p(x)$ ממעלה 2 המקיים $p(3)=1,\ p'(3)=1,\ p''(3)=1$.

$$p(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2.5$$

פתרון: באותה השיטה כמו בשאלה הקודמת רק בעזרת נתונים שונים.

שאלה מס' 9

מצאו פולינום ממעלה 3 שמתאפס בנקודה $x=3$, והנגזרת שלו גם היא מתאפסת שם.
דוגמא:

$$f(x)=(x-3)^3$$

שאלה מס' 10

פתרון אחד של המשוואה $x^2+157x=1670$ הוא $x=10$. מהו הפתרון השני?

פתרון: נסתכל על הפולינום $f(x)=x^2+157x-1670$. לפי נוסחאות וייטה סכום השורשים הוא $-\frac{b}{a}=-157$ ולכן השורש השני הוא -167.

שאלה מס' 11

תהא $f(x)=x(x-3)^6$. חשבו את $f'(3)$.

פתרון: אפשר לגזור את הפונקציה ולהציב. אפשר גם לשים לב ש־$x=3$ הוא שורש מריבוי 6 של הפולינום ולכן חמש הנגזרות הראשונות יהיו אפס בנקודה $x=3$.

שאלה מס' 12

תנו דוגמה לפולינום $p(x)$ ממעלה כלשהי שיש לו שורשים $1,2,3$ והוא מקיים $p'(1)=7$.

פתרון: הפולינום הוא מהצורה $p(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$. לפי כלל הגזירה של מכפלה, הנגזרת של הפולינום היא

$$p'(x)=a\left[(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)\right]$$

מהנתון $p'(1)=2a=7$ ולכן $a=3.5$.

שאלה מס' 13

כתבו נוסחאות לשתי פרבולות, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ו־$g(x) = dx^2 + ex + f$, שהראשונה עוברת דרך הנקודה $(1,1)$ והשנייה עוברת דרך הנקודה $(2,3)$, והמשיק לפרבולה הראשונה בנקודה $(1,1)$ הוא גם משיק לפרבולה השנייה בנקודה $(2,3)$. (שימו לב: יש יותר מפתרון אחד אפשרי).

פתרון: נכתוב $f(x) = ax^2 + bx + c$ ו־$g(x) = dx^2 + ex + f$.
יש לנו שישה נעלמים - a, b, c, d, e, f. מספר הנתונים שלנו הוא שלושה, שאחד מהם (ראו להלן) נותן שתי משוואות. כלומר נקבל ארבע משוואות. פירוש הדבר הוא שיהיו הרבה פתרונות אפשריים.
הנתון הראשון אומר ש־$f(1) = 1$, כלומר

$$a + b + c = 1$$

הנתון השני הוא ש־$g(2) = 3$, כלומר

$$4d + 2e + f = 3$$

הנוסחה של המשיק לגרף של $f(x)$ בנקודה $x = 1, y = 1$ היא:

$$y - 1 = f'(1)(x - 1)$$

(התזוזה ב־y היא התזוזה ב־x כפול שיפוע המשיק, כלומר כפול קצב השינוי של הפונקציה), ומכיוון ש־$f'(x) = 2ax + b$, מתקבל שנוסחת המשיק היא

$$y - 1 = (2a + b)(x - 1)$$

או: $y = (2a + b)x + (1 - 2a - b)$
בדומה, נוסחת המשיק לפרבולה השנייה בנקודה $(2,3)$ היא

$$y - 3 = (4d + e)(x - 2)$$

או: $y = 3 + (4d + e)(x - 2) = (4d + e)x + (3 - 8d - 2e)$
והשוויון בין המשיקים הוא אם כן:

$$(2a + b)x + (1 - 2a - b) = (4d + e)x + (3 - 8d - 2e)$$

וזה שזה נכון לכל x אומר ש־

$$2a + b = 4d + e$$

ו־

$$1 - 2a - b = 3 - 8d - 2e$$

קיבלנו כך 4 משוואות.

$$a + b + c = 1$$

$$4d + 2e + f = 3$$

$$2a + b = 4d + e$$

$$1 - 2a - b = 3 - 8d - 2e$$

איך מוצאים פתרון (לפחות אחד) ל־4 משוואות ב־6 נעלמים? בוחרים ערכים לשניים מן הנעלמים. למשל, בוחרים $b = c = 0$ ־ בדקו שהמערכת המתקבלת לשאר הנעלמים פשוטה למדי.

שאלה מס' 14

כתבו נוסחה של פונקציה שמתאפסת בדיוק 5 פעמים בקטע $[0,1]$, הערך המקסימלי שלה הוא 3 בקטע הזה, והיא מקבלת אותו 2 פעמים.

דוגמא:

$$f(x) = 3\sin(4\pi x)$$

הרעיון הוא לנסות $3\sin(ax)$ ולבדוק לאיזה a זה עובד. כדאי לצייר את הפונקציה שמוצעת לעיל כדי להבין אם ולמה היא עובדת.

שאלה מס' 15

מצאו פונקציה רציפה וגזירה פעמיים שתחום הקמירות שלה (התחום שבו $f''(x) \geq 0$) הוא בדיוק הקבוצה $[0,1]$.

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$$

פתרון: נמצא את פונקצית הנגזרת השנייה שמקיימת את התנאי ונבצע פעמיים אינטגרציה. למשל,

$$f''(x) = -x(x-1) = x - x^2$$

שאלה מס' 16

חשבו $f'(1)$ עבור

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$$

פתרון: השתמשו בעובדה ש־ $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$ כדי להראות ש־ $f(x) = \arccos|cos(x)| = x$ בסביבת הנקודה $x = 1$ ולכן הנגזרת תהיה 1.

שאלה מס' 17

א. תהא $f(x) = \arcsin(3x+5)$. אזי הפונקציה ההפוכה לה היא

$$g(x) = \frac{\sin x - 5}{3}$$

.

הסבר: אם $y = \arcsin(3x+5)$ **אז** $\sin y = 3x+5$**, ולכן** $x = \frac{\sin y - 5}{3}$. **כלומר:** $g(y) = \frac{\sin y-5}{3}$. **בשאלה בקשו את הפונקציה ההפוכה במונחים של** x.

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא: $[-\pi/2, \pi/2]$

הסבר: הפונקציה $\frac{\sin x-5}{3}$ **מוגדרת לכל** x. **אבל כוונת השאלה היא אילו ערכי** y **מתקבלים בפונקציה** $y = f(x) = \arcsin(3x+5)$. **והפונקציה** $\arcsin$ **מוגדרת כך שערכיה הם בין** $-\pi/2$ **לבין** $\pi/2$.

שאלה מס' 18

תנו דוגמה לפונקציה $f(x) \neq 0$ שמקבלת מקסימום בנקודה $x = 4$ ומקיימת $f''(4) = 0$.

דוגמא:

$$f(x) = -(x-4)^4$$

שאלה מס' 19

א. תהא $f(x) = \sqrt{|3x+5|}$. **אזי הפונקציה ההפוכה לה היא**

$$g(x) = \frac{x^2-5}{3}$$

פתרון: הפונקציה לא חד חד ערכית ולכן צריך להפריד לשני תחומים. אם $x \geq -\frac{3}{2}$ **אז נקבל** $y = \sqrt{3x+5}$ **ולאחר העברת אגפים נקבל** $x = \frac{y^2-5}{3}$ **ולאחר החלפת תפקידים בין** x **ל-** y **נקבל את הדרוש. באותו אופן ניתן למצוא פונקציה הפוכה בתדחום** $x \leq -\frac{3}{2}$.

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא:** $(0, \infty)$.

פתרון: התחום של הפונקציה ההפוכה הוא בעצם התמונה של הפונקציה המקורית.

שאלה מס' 20

כתבו נוסחה של פונקציה שמתאפסת בדיוק 4 **פעמים בקטע** $(0,1)$**, הערך המקסימלי שלה הוא** 3 **בקטע הזה, והיא מקבלת אותו גם כן** 4 **פעמים.**

דוגמא:

$$f(x) = 3\sin^2(4.5\pi x)$$

הרעיון הוא לנסות $3\sin^2(ax)$ **ולבדוק לאיזה** a **זה עובד. כדאי לצייר את הפונקציה שמוצעת לעיל כדי להבין אם ולמה היא עובדת.**

שאלה מס' 21

נתון שהפונקציה $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ **היא חד חד ערכית בקטע** $[a, b)$. **מהו הערך המקסימלי של** $b - a$**?**

פתרון: נחקור את הפונקציה $f\left(x\right) = \cos^4 x + \sin^4 x$ ונמצא את נקודות הקיצון. מהחקירה מקבלים שנקודות המקסימום של הפונקציה הן $\left(\frac{\pi}{2}k, 1\right)$ ונקודות המינימום של הפונקציה הן $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \frac{1}{2}\right)$. כיוון שהפונקציה מחזורית, הקטע בעל האורך המקסימלי הוא בין נקודת המקסימום והמינימום. במקרה זה $b - a = \frac{\pi}{4}$.

שאלה מס' 22

תנו דוגמה לפונקציה $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ש- $f\left(0\right) = f\left(1\right)$ ו־$Im\left(f\right) = [-1, 1]$.

פתרון: דוגמה א': ניקח פונקציה סימטרית סביב $\frac{1}{2}$. כשמזיזים אותה ומותחים אותה כך שתהיה בעלת התמונה הרצויה. למשל, $f\left(x\right) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$.

דוגמה ב': נחשוב על פונקצית הקוסינוס. התמונה שלה היא הקטע $[-1, 1]$. $\cos 0 = 1$. נרצה למצוא הפונקציה $f\left(x\right)$ כדי ש־$f\left(1\right) = 1$ ו־$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. נבחר $f\left(x\right) = \cos\left(2\pi x\right)$.

שאלה מס' 23

תנו דוגמה לפונקציה $f\left(x\right)$ שמוגדרת לכל המספרים הממשיים, ומקיימת את שני התנאים הבאים:

1. **$f'\left(x\right)$ עולה תמיד.**
2. **$f\left(x\right)$ יורדת תמיד.**

פתרון: נסתכל על e^{-x}. זוהי פונקציה שהיא יורדת לכל x והנגזרת $f'\left(x\right) = -e^{-x}$ תמיד עולה. בדקו את התכונות האלה בעזרת הגזרות. השתמשו בעובדה ש־$e^y > 0$ לכל y.

שאלה מס' 24

תהיינה $h\left(x\right) = -x \quad g\left(x\right) = \pi - x, \quad f\left(x\right) = \sin x,$

א. מהו $f\left(g\left(h\left(\pi\right)\right)\right)$?

ב. שתי פונקציות $f\left(x\right), g\left(x\right)$ נקראות "מתחלפות" אם $g\left(h\left(x\right)\right) = h\left(g\left(x\right)\right)$ לכל x שעבורו הביטויים האלה מוגדרים. אילו מ־3 הזוגות שאפשר להרכיב מהן הם זוגות של פונקציות מתחלפות?

פתרון:

א.

$$f\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right) = f\left(g\left(-x\right)\right) = f\left(\pi + x\right) = \sin\left(\pi + x\right)$$

כלומר, $f\left(g\left(h\left(\pi\right)\right)\right) = \sin\left(2\pi\right) = 0$.

ב. נבדוק כל אחד מהזוגות:

f, g:

$$f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\pi - x\right) = \sin\left(\pi - x\right)$$
$$g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\sin x\right) = \pi - \sin x$$

אין שוויון בין שתי הפונקציות. למשל, אם נציב $x = 0$ נקבל שתי תוצאות שונות.

:g,h

$$g\left(h\left(x\right)\right)=g\left(-x\right)=\pi+x$$
$$h\left(g\left(x\right)\right)=h\left(\pi-x\right)=x-\pi$$

וגם כאן, אין שוויון בין הפונקציות.
:f,h

$$f\left(h\left(x\right)\right)=f\left(-x\right)=\sin\left(-x\right)$$
$$h\left(f\left(x\right)\right)=h\left(\sin x\right)=-\sin x$$

ובאמת לכל x מתקיים $\sin\left(-x\right)=-\sin x$.

שאלה מס' 25

מהי נוסחת הפרבולה שהגרף שלה משיק לישר $y=2x+3$ בנקודה $(1,5)$ ועובר דרך הנקודה $(2,10)$?

פתרון: נסוחה כללית של פרבולה היא $y=ax^2+bx+c$. נכתוב שלוש משוואות כדי למצוא את הפרמטרים.
ידוע שהפרבולה עוברת דרך שתי נקודות $(2,10)\,,(1,5)$ לכן

$$5=a+b+c$$
$$10=4a+2b+c$$

בנוסף, נתון שהפרבולה משיקה לישר $y=2x+3$ בנקודה $(1,5)$, כלומר השיפוע של המשיק לפרבולה בנקודה $(1,5)$ הוא 2, כלומר

$$2=2a+b$$

נותר לפתור את המשוואות ולמצוא את הפרמטרים. מתקיים $b=2-2a$. בנוסף, אם מחסרים משוואה ראשונה מהשניה, נקבל $5=3a+b$. לכן, $5=3a+2-2a$. מה שאומר ש־ $a=3,b=-4,c=6$

הפרבולה המבוקשת היא $y=3x^2-4x+6$.

שאלה מס' 26

פונקציה נקראת מחזורית עם מחזור a אם $f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$ לכל x.

א. מהו המחזור של $\sin\left(3x\right)$?

ב. כתבו פונקציה לינארית מחזורית. מהו המחזור שלה? האם יש לה מחזור יחיד?

פתרון:

א.   המחזור של סינוס הוא 2π, כלומר

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

כשמחליפים את x ב־$3x$ המשתנה רץ פי 3 יותר מהר, ולכן המחזור יהיה $\frac{2\pi}{3}$.
כדי לראות זאת במפורש, נסמן $f(x)=\sin 3x$. אז:
לפי זה

$$f(x+\frac{2\pi}{3})=\sin 3(x+\frac{2\pi}{3})=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)$$

ב.   ניקח למשל, $f\left(x\right)=2$ והמחזור שלה יכול להיות כל מספר a, כי לכל x מתקיים $f\left(x+a\right)=2=f\left(a\right)$, לכן כל מספר ממשי הוא מחזור של הפונקציה. יכולנו לקחת כל פונקציה קבועה אחרת והיא תקיים את התנאי.

שאלה מס' 27

תהא $f\left(x\right)=x^2+1$. תהא $g\left(y\right)$ הפונקציה ההפוכה של $f\left(x\right)$ בתחום שבו $1\le x\le 5$ (ההגבלה הזאת נעשית כדי שהפונקציה תהיה חד חד ערכית והפונקציה ההפוכה תהיה מוגדרת, כלומר בהינתן y נדע מהו x באופן חד משמעי). כתבו נוסחה ל־$g\left(y\right)$ וכתבו את הנוסחה ל־g גם עם המשתנה x, כלומר מהו $g\left(x\right)$? מהי $g'\left(10\right)$?

פתרון: $y=x^2+1$, **לכן** $x=\pm\sqrt{y-1}$. **כיוון שתחום ה־ x הוא חיובי, נקבל ש־** $g\left(y\right)=\sqrt{y-1}$.
במונחים של x נקבל $g\left(x\right)=\sqrt{x-1}$.

יש שתי דרכים לחשב את הנגזרת. אפשרות אחת, היא פשוט לגזור את הפונקציה שקיבלנו ולהציב את הערך הדרוש:

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

ולכן $g'\left(10\right)=\frac{1}{6}$.

אפשרות שניה, היא להשתמש בנוסחה לנגזרת של הפונקציה ההפוכה. לצורך כך צריך למצוא את המקור של 10, כלומר $f\left(3\right)=10$. לפי הנוסחה

$$g'\left(10\right)=\frac{1}{f'\left(3\right)}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

שאלה מס' 28

תהא $f\left(x\right)=\ln\left(\arctan\left(2x+5\right)\right)$. מצאו את הפונקציה ההפוכה לה.

פתרון:

$$\begin{gathered}y=\ln\left(\arctan\left(2x+5\right)\right)\\ e^y=\arctan\left(2x+5\right)\\ \tan\left(e^y\right)=2x+5\\ x=\tfrac{\tan\left(e^y\right)-5}{2}\end{gathered}$$

לכן הפונקציה ההפוכה היא

$$f^{-1}\left(x\right)=\frac{\tan\left(e^x\right)-5}{2}$$

.

שאלה מס' 29

תהא פונקציה המקיימת $f'(2)=10$, $\quad f(2)=3$.

א. תנו דוגמה לפונקציה כזו.

ב. נסמן את הפונקציה ההפוכה של f **ב-** $g(x)$ **(אנו מניחים שיש פונקציה הפוכה). אילו שני נתונים אפשר להסיק מהנתונים בשאלה על** $g(x)$ **ו-**$g'(x)$ **(הכוונה: אילו ערכים של שתי הפונקציות האלה אפשר לדעת מן הנתון).**

פתרון:

א. ניקח פונקציה שמקיימת $f'(2)=3$**, למשל** $f'(x)=3$**, אז** $f(x)=3x+C$ **ולאחר הצבת הנתון** $f(2)=10$**, נקבל ש-** $f(x)=3x+4$.

ב. כיוון ש- $f(2)=3$ **ו-**g **היא הפונקציה ההפוכה של** f **נקבל** $g(3)=2$.
כדי למצוא את הנתון על הנגזרת נשתמש בנוסחה לנגזרת של הפונקציה ההפוכה: $g'(3)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{10}$.

שאלה מס' 30

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$ **שאינה פולינום, המקיימת את שלושת התנאים הבאים:**

1. $f(0)=1$
2. $f'(0)=2$
3. $f''(0)=3$

פתרון: דרך א': למצוא פתרון שהוא פולינום ואז להוסיף מחובר שהוא לא פולינום, ש- 0 **מאפס אותו ואת שתי הנגזרות הראשונות. מחובר כזה יכול להיות למשל** $\sin(x^3)$.
כדי למצוא את הפולינום $g(x)$ **נבחר** $g''(x)=3$ **ונבצע פעמיים אינטגרציה תוך הצבת הנתונים למציאת קבוע האינטגרציה ונקבל** $g(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+1$ **ונבחר** $f(x)=g(x)+\sin(x^3)$.
דרך ב': לבחור $f(x)=e^x+a+bx+cx^2$ **ולמצוא את** a,b,c **שמקיימים את התנאים.**

שאלה מס' 31

תנו דוגמה לפונקציה $f(x)$**שמקיימת את התנאים הבאים:**

1. **השטח בין הגרף** $y=f(x)$ **לבין ציר** x **בין הערכים** $x=0$ **ו-**$x=7$ **הוא** 10.
2. $f'(0)=1$
3. $f(1)=3$

התשובה צריכה להינתן בנוסחה אחת.

פתרון: הפונקציה צריכה לקיים שלושה תנאים. נכתוב פונקציה עם שלושה פרמטרים ו ונמצא אותם מהתנאים. הכי פשוט זה לבחור פולינום $f(x)=a+bx+cx^2$.
מתקיים:

1.

$$10=\int_0^7\left(a+bx+cx^2\right)dx=7a+\frac{7^2}{2}b+\frac{7^3}{3}c$$

2. $b=1$

3. $a+b+c=3$

נותר לפתור את המערכת ולמצוא את הפתרון. מתקיים $a=2-c$ **ולכן** $10=7(2-c)+\frac{49}{2}+\frac{343}{3}c$**. מוצאים את** c **ואז את** a **(לא להיבהל משברים).**

שאלה מס' 32

מצאו פונקציה $f(x)$ **המוגדרת לכל המספרים החיוביים, ומקיימת את התנאים הבאים:**

1. $f(x)$ **עולה ממש.**
2. $f(0)=0$
3. **לכל מספר טבעי** $t\geq 0$ **השטח בין הגרף** $y=f(x)$ **לבין ציר ה־**y **(שימו לב - לא ציר** x**) בין** $y=0$ **ל־**$y=t$ **הוא** t^2**.**

פתרון: התנאי השלישי אומר שבעצם האינטגרל של הפונקציה ההפוכה $g(x)=f^{-1}(x)$ **מקיים**

$$\int_0^t g(x)\,dx=t^2$$

זה אומר ש־ $g(x)=2t+C$ **אבל כיוון ש־** $f(0)=0$**, גם** $g(0)=0$ **ולכן** $C=0$**, כלומר** $g(x)=2x$**. זה אומר ש־** $f(x)=\frac{1}{2}x$**.**