

## מבחן סיווג במתמטיקה 28.01.2018

מס' סטודנט:  פקולטה:

משך הבחינה 3 שעות. השימוש בחומר עזר כלשהו אסור. מלאו תשובות במסגרות. לא תיבדק הדרך, והציון על כל סעיף של שאלה יהיה 5 נקודות או 0. סכום נקודות אפשרי - 100. ציון עובר 55.

### ניקוד

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	שאלה 5
	שאלה 6
	שאלה 7
	שאלה 8
	שאלה 9
	שאלה 10
	שאלה 11
	שאלה 12
	שאלה 13
	שאלה 14
	שאלה 15
	שאלה 16
	שאלה 17
	שאלה 18
	שאלה 19
	שאלה 20
	סה"כ

## שאלה מס' 1

כתבו את המספר המחזורי  $x = 3.141414\dots$  כשבר פשוט מצומצם (עם מונה גדול מן המכנה).

$$x = \boxed{\frac{311}{99}}$$

## שאלה מס' 2

מצאו פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(x) = \tan x$  ו- $f(0) = 5$ .

$$f(x) = \boxed{-\ln |\cos x| + 5}$$

פתרון: ביצוע אינטגרציה.

## שאלה מס' 3

מצאו את סכום הסדרה הנתונה ע"י  $\log_2 a, \log_4 a, \log_8 a, \log_{16} a, \log_{32} a, \log_{64} a$  עבור  $a = 64$ .

$$S = \boxed{\frac{147}{10} = 14.7}$$

פתרון:

מתקיים:  $\log_{2^k} a = \frac{\log_2 a}{\log_2 2^k} = \frac{\log_2 a}{k \log_2 2} = \frac{\log_2 a}{k}$  ולכן:

$$\sum_{k=1}^6 \log_{2^k} a = \sum_{k=1}^6 \frac{\log_2 a}{k} = (\log_2 a) \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k}$$

## שאלה מס' 4

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  כך שהפונקציה  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  מקיימת  $g'(2) = 10$ .

$$f(x) = \boxed{100x^2}$$

## שאלה מס' 5

כתבו את כל הפתרונות המשוואה הבאה:  $\sin x + \cos x = 0$  בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

$$\boxed{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$$

### שאלה מס' 6

מצאו פולינום  $p(x)$  כך ש-  $x^{11} + 1 = p(x)(x + 1)$ .

$$p(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{10} (-1)^k x^k}$$

### שאלה מס' 7

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמוגדרת לכל המספרים הממשיים החיוביים, כזו ש:  $f'(x)$  יורדת לכל  $x > 0$  ו-  $f(x)$  עולה בתחום הזה.

$$f(x) = \boxed{-e^{-x}}$$

### שאלה מס' 8

מצאו מספר מרוכב  $z$  בעל ערך מוחלט 1 כך ש-  $w = \frac{z}{\bar{z}}$  הוא בעל זווית  $60^\circ$  עם ציר  $x$ . ( $\bar{z}$  הוא הצמוד של  $z$ ).

$$z = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$$

**פתרון:**

נשים לב שמתקיים:  $w = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = z^2$   
נסמן  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ונקבל:  $w = z^2 = \text{cis}(2\theta)$

### שאלה מס' 9

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin(5x)}{2x + \cos(2x)} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

### שאלה מס' 10

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמוגדרת לכל המספרים הממשיים, רציפה בכל נקודה וגזירה בכל נקודה פרט לנקודה  $x = 3$ .

$$f(x) = \boxed{|x - 3|}$$

### שאלה מס' 11

מצאו שלושה וקטורים, שונים מאפס,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , במישור בעלי אותו אורך שסכומם הוא  $(0, 0)$

$$\vec{u} = \boxed{(1, 0)} \quad \vec{v} = \boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad \vec{w} = \boxed{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

### שאלה מס' 12

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמוגדרת לכל המספרים הממשיים, גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה, ונגזרותיה מכל סדר שואפות לאינסוף כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

$$f(x) = \boxed{e^x}$$

### שאלה מס' 13

יהא  $z = 4 + 3i$ . מצאו מספר מרוכב  $w$  בעל ערך מוחלט  $|w|$  מקסימלי המקיים  $|z + w| \leq 10$ .

$$w = \boxed{-12 - 9i = -3(4 + 3i)}$$

### שאלה מס' 14

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמוגדרת לכל המספרים הממשיים, רציפה וגזירה בכל נקודה ומקימת את שני התנאים הבאים: א.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$  ו-ב.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  אינו קיים.

$$f(x) = \boxed{\frac{\sin(x^2)}{x} + 3}$$

### שאלה מס' 15

נתון שסכום סדרה חשבונית בת 5 איברים  $a_1, \dots, a_5$  הוא 100. מכך אפשר להסיק את גודלו של אחד מאיברי הסדרה,  $a_i$ . כתבו את ערכו של  $i$  ואת ערכו של  $a_i$ :

$$i = \boxed{3} \quad a_i = \boxed{20}$$

### פתרון:

האיבר השלישי הוא ממוצע של הראשון והחמישי או של השני והרביעי. סכום האיברים הוא לכן האיבר השלישי כפול 5.

## שאלה מס' 16

מצאו שני מספרים מרוכבים  $z_1, z_2$  שגם סכומם וגם מכפלתם שווה 1.

$$z_1 = \boxed{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad z_2 = \boxed{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

פתרון:

נסתכל על  $z_1, z_2$  כשורשים של הפולינום:  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2$ .  
כלומר על מנת למצוא את  $z_1, z_2$  יש לפתור  $z^2 - z + 1 = 0$ .

## שאלה מס' 17

חשבו:

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = \boxed{2^{10} = 1024}$$

פתרון: הבינום של ניוטון.

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 1^k 1^{10-k} = (1+1)^{10} = 2^{10}$$

## שאלה מס' 18

תנו דוגמה לפונקציה  $f(x)$  שמוגדרת לכל המספרים הממשיים, רציפה וגזירה בכל נקודה שעבורה הפונקציה  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$  מונוטונית עולה ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 3$ .

$$f(x) = \boxed{\frac{12}{\pi} \frac{1}{x^2+1}}$$

## שאלה מס' 19

נתונות 3 נקודות במרחב  $A : (-1, 2, 3); B : (0, 1, 0); C : (5, 3, 2)$  אזי:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \boxed{(6, 1, -1)}$$

## שאלה מס' 20

מצאו מספר קטן ביותר  $a$  עבורו  $|a - 1|^2 \leq a$ .

$$a = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$